

Programa para resolver por el método del elemento finito el flujo establecido en suelos

Agustín Tristán*

1. INTRODUCCION

El método del elemento finito sustituye con ventaja al tradicional del trazo de la red de flujo, o al de las diferencias finitas, pues permite resolver el problema general de materiales diferentes en un suelo con características no isotrópicas en cada uno de ellos.

El análisis que sigue va encaminado al uso de un programa de computadora, elaborado de una manera accesible para los alumnos de ingeniería a nivel profesional. Para hacer este trabajo un poco más completo, se presenta la solución general del método, aunque sin llegar a demostrarla.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

La ecuación que rige el flujo establecido (bidimensional) en un medio poroso es

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

donde K_x , K_y son las permeabilidades en sentidos horizontal y vertical, y h es el potencial. Para un suelo homogéneo e isótropo se reduce a la conocida ecuación de Laplace.

La segunda ecuación del flujo que puede plantearse es la ley de Darcy:

$$V_x = - K_x i_x \quad (2)$$

$$V_y = - K_y i_y$$

Esta ecuación, en forma matricial, es

$$\{V\} = - [R] \{i\} \quad (2')$$

donde

$$\{V\} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \quad \{i\} = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

* Profesor, Facultad de Ingeniería, UNAM

3. SOLUCION CON ELEMENTOS FINITOS

Una vez que el suelo se ha idealizado con elementos finitos triangulares, en cada nudo habrá un potencial, el cual puede ser dado como condición del problema o, por lo contrario, ser desconocido (fig 1).

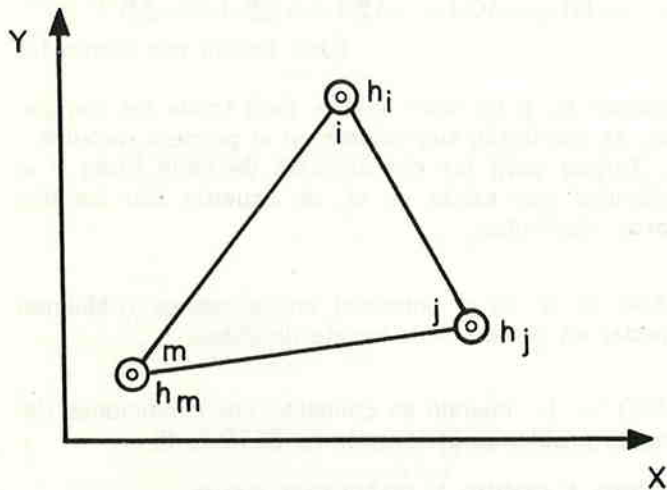


Fig 1

En cualquier punto del elemento, el potencial puede aproximarse por un modelo lineal de la forma

$$h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

Los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se encuentran por factorizaciones en función de los valores de las coordenadas y los potenciales en los nudos, por lo que

$$h = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_i x + c_i y)h_i + (a_j + b_j x + c_j y)h_j + (a_m + b_m x + c_m y)h_m \right] \quad (3)$$

en que

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

Para $a_j, a_m, b_j,$ etc, se intercambian los subíndices, y

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

es el área del elemento triangular.

Llamando $N_i = a_i + b_i x + c_i y$ se puede escribir la ec 3 en forma matricial

$$h = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{bmatrix} \quad (3')$$

El gradiente de h será

$$\{i\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$\{i\} = [B] \{h\}^e \quad (4)$$

("e" indica "elemento")

Según las refs 1 y 2, se puede llegar a demostrar que la ecuación funcional que representa al flujo tendrá su condición estacionaria, que equivale a decir que la diferencia de potencial en cada punto será mínima si

$$[K] \{h\}^e = \{0\} \quad (5)$$

donde

$$[K] = \iiint_V [B]^T [R] [B] dV$$

o bien

$$[K] = \frac{1}{4\Delta} [B]^T [R] [B]$$

Siendo todas estas matrices conocidas, la solución se reduce a encontrar la matriz $[K]$ general del problema, incluir las condiciones de frontera para los potenciales conocidos, y resolver el sistema de ecuaciones para los potenciales desconocidos.

Con base en estos valores, se llega a

$$\{V\} = -[R] \{i\} = -[R] [B] \{h\}^e \quad (6)$$

y, finalmente

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_{xi} \\ Q_{xj} \\ Q_{xm} \\ Q_{yi} \\ Q_{yj} \\ Q_{ym} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ b_j & 0 \\ b_m & 0 \\ 0 & c_i \\ 0 & c_j \\ 0 & c_m \end{bmatrix} \{V\} \quad (7)$$

SOLUCION. En este caso ya está hecha la división en elementos finitos, por lo que solo habrá que dar los datos.

Ejemplo 1

Número de elementos: 8; número de nudos: 8

Como ejemplo: Elemento 1) nudos que lo forman: 3, 4 y 1; permeabilidad: $K_x = 1.0$, $K_y = 1.0$.

Como ejemplo: Nudo 1) coordenadas (1.0, 2.0), potencial: 100.0 caso: 1

Enseguida se presenta la hoja de datos completa:

	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1										
8		8								
3		4	1		1.0		1.0			
4		2	1							
4		5	2							
5		6	2							
7		4	3							
7		5	4							
7		8	5							
8		6	5							
		1.0		2.0		100.		1		
		2.0		2.0		80.		1		
		0.0		1.0		70.		1		
		1.0		1.0						
		2.0		1.0						
		3.0		1.0		40.		1		
		1.0		0.0		100.		1		
		2.0		0.0		100.		1		

SOLUCION DEL PROBLEMA NUMERO 1

ELEMETO	NUDOS QUE FORMAN AL ELEMENTO			PERMEABILIDAD X	PERMEABILIDAD Y
1	3	4	1	.100E+01	.100E+01
2	4	2	1	.100E+01	.100E+01
3	4	5	2	.100E+01	.100E+01
4	5	6	2	.100E+01	.100E+01
5	7	4	3	.100E+01	.100E+01
6	7	5	4	.100E+01	.100E+01
7	7	8	5	.100E+01	.100E+01
8	8	6	5	.100E+01	.100E+01

NUDO	ABSCISA (X)	ORDENADA (Y)	POTENCIAL	CASO
1	1.0000	2.0000	100.000000	1
2	2.0000	2.0000	80.000000	1

3	0.0000	1.0000	70.000000	1
4	1.0000	1.0000	0.000000	0
5	2.0000	1.0000	0.000000	0
6	3.0000	1.0000	40.000000	1
7	1.0000	0.0000	100.000000	1
8	2.0000	0.0000	100.000000	1

SOLUCIONES DEL PROBLEMA
 NUDO ABSCISA (X) ORDENADA (Y) POTENCIAL

1	1.0000	2.0000	100.000000
2	2.0000	2.0000	00.000000
3	0.0000	1.0000	70.000000
4	1.0000	1.0000	86.666667
5	2.0000	1.0000	76.666667
6	3.0000	1.0000	40.000000
7	1.0000	0.0000	100.000000
8	2.0000	0.0000	100.000000

ELEMENTO	VELOCIDAD		G A S T O			Q		
	VX	VY	QXI	QXJ	QXM	QYI	QYJ	QYM
1	-.16667E+02	-.13333E+02	-.83333E+01	.83333E+01	0.	0.	-.66667E+01	.66667E+01
2	.20000E+02	-.13333E+02	0.	-.10000E+02	.10000E+02	-.66667E+01	0.	.66667E+01
3	.10000E+02	-.33333E+01	.50000E+01	-.50000E+01	0.	0.	-.16667E+01	.16667E+01
4	.36667E+02	-.33333E+01	.18333E+02	-.18333E+02	0.	-.16667E+01	0.	.16667E+01
5	-.16667E+02	.13333E+02	0.	.83333E+01	-.83333E+01	.66667E+01	-.66667E+01	0.
6	.10000E+02	.13333E+02	0.	-.50000E+01	.50000E+01	.66667E+01	0.	-.66667E+01
7	0.	.23333E+02	0.	0.	0.	0.	.11667E+02	-.11667E+02
8	.36667E+02	.23333E+02	0.	-.18333E+02	.18333E+02	.11667E+02	0.	-.11667E+02

Aunque no se requiere, como ya se dijo antes, puede trazarse una red de flujo para este problema, quedando una configuración como se muestra (fig 3).

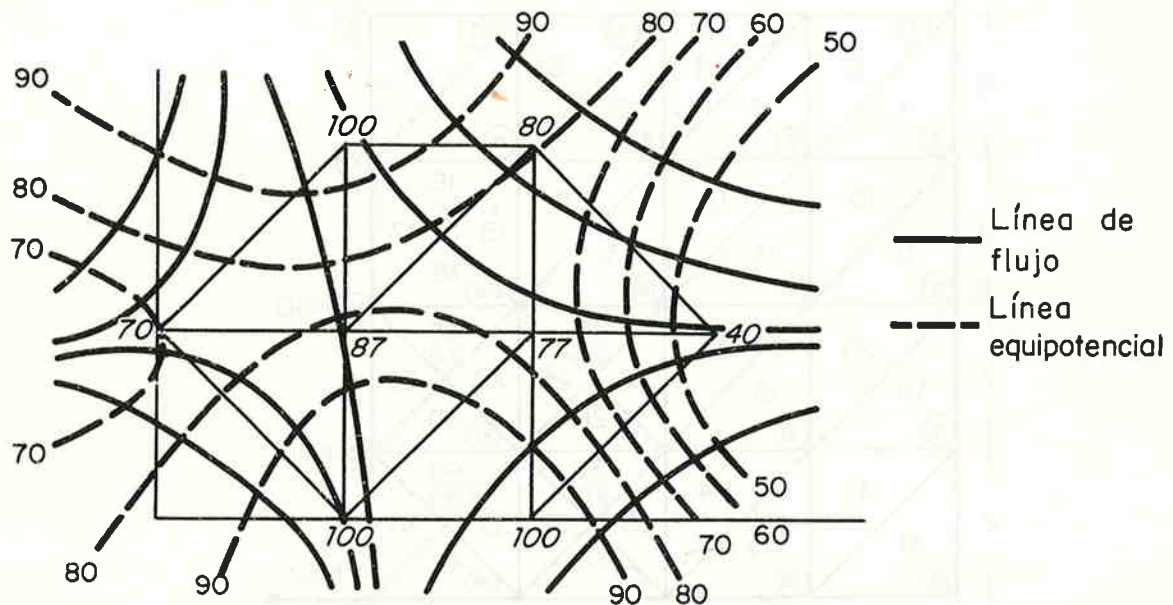


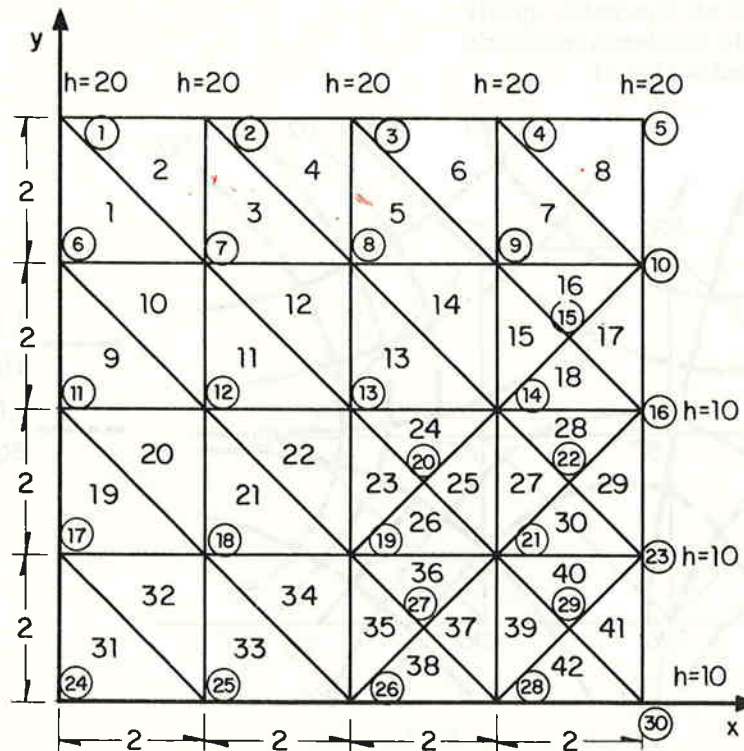
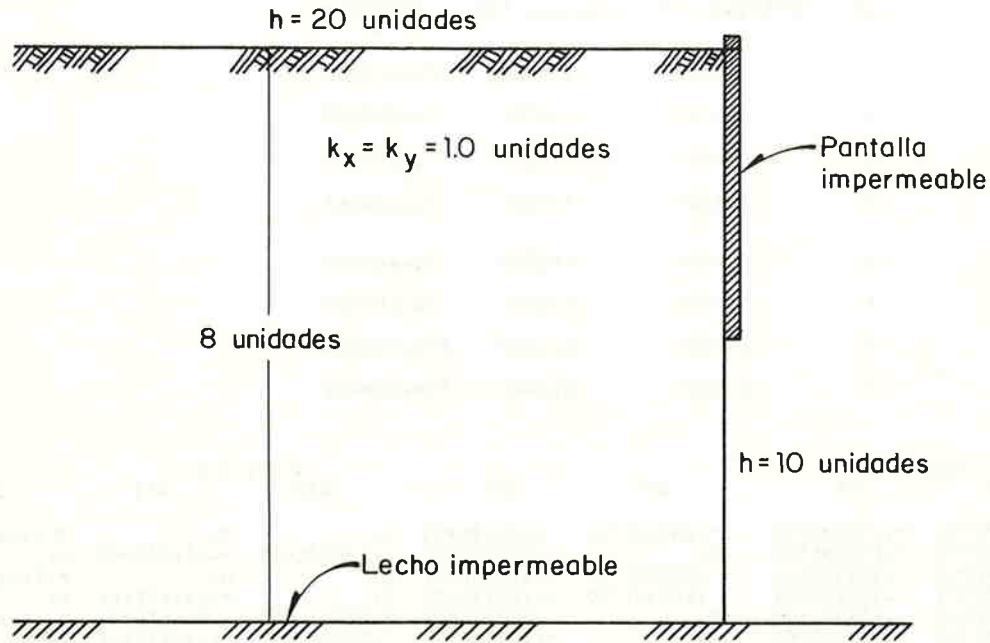
Fig 3

A su vez, las velocidades calculadas en x y en y , y los gastos, también en las dos direcciones, corresponden a los nudos de cada elemento. Nótese que Q_{XI} es el gasto en dirección x para el nudo I ; como ejemplo: para el elemento 1 el nudo I es el 3, el nudo J es el 4, etc.

Ejemplo 2. Trazar la red de flujo y calcular los gastos

de salida para el suelo presentado en la fig 4. La carga en la frontera superior es 20, y en la frontera vertical es 10. El coeficiente de permeabilidad es 1.0. Considérese el suelo homogéneo e isótropo.

SOLUCION. Para el cálculo se tomó una red de 8 unidades por lado. En la vecindad de los puntos de salida se hizo una división menor.



SOLUCION DEL PROBLEMA NUMERO 2

ELEMENTO	NUDOS QUE FORMAN AL ELEMENTO			PERMEABILIDAD X	PERMEABILIDAD Y
1	1	6	7	.100E+01	.100E+01
2	1	7	2	.100E+01	.100E+01
3	2	7	8	.100E+01	.100E+01
4	2	8	3	.100E+01	.100E+01
5	3	8	9	.100E+01	.100E+01
6	3	9	4	.100E+01	.100E+01
7	4	9	10	.100E+01	.100E+01
8	4	10	5	.100E+01	.100E+01
9	6	11	12	.100E+01	.100E+01
10	6	12	7	.100E+01	.100E+01
11	7	12	13	.100E+01	.100E+01
12	7	13	8	.100E+01	.100E+01
13	8	13	14	.100E+01	.100E+01
14	8	14	9	.100E+01	.100E+01
15	9	14	15	.100E+01	.100E+01
16	9	15	10	.100E+01	.100E+01
17	15	16	10	.100E+01	.100E+01
18	15	14	16	.100E+01	.100E+01
19	11	17	18	.100E+01	.100E+01
20	11	18	12	.100E+01	.100E+01
21	12	16	19	.100E+01	.100E+01
22	12	19	13	.100E+01	.100E+01
23	13	19	20	.100E+01	.100E+01
24	13	20	14	.100E+01	.100E+01
25	20	21	14	.100E+01	.100E+01
26	20	19	21	.100E+01	.100E+01
27	14	21	22	.100E+01	.100E+01
28	14	22	16	.100E+01	.100E+01
29	22	23	16	.100E+01	.100E+01
30	22	21	23	.100E+01	.100E+01
31	17	24	25	.100E+01	.100E+01
32	17	25	18	.100E+01	.100E+01
33	18	25	26	.100E+01	.100E+01
34	18	26	19	.100E+01	.100E+01
35	19	26	27	.100E+01	.100E+01
36	19	27	21	.100E+01	.100E+01
37	27	28	21	.100E+01	.100E+01

38	27	26	28	.100E+01	.100E+01
39	21	28	29	.100E+01	.100E+01
40	21	29	23	.100E+01	.100E+01
41	29	30	23	.100E+01	.100E+01
42	29	28	30	.100E+01	.100E+01

NUMO	ABSCISA (X)	ORDENADA (Y)	POTENCIAL	CASO
1	0.0000	8.0000	20.000000	1
2	2.0000	8.0000	20.000000	1
3	4.0000	8.0000	20.000000	1
4	6.0000	8.0000	20.000000	1
5	8.0000	8.0000	20.000000	1
6	0.0000	6.0000	0.000000	0
7	2.0000	6.0000	0.000000	0
8	4.0000	6.0000	0.000000	0
9	6.0000	6.0000	0.000000	0
10	8.0000	6.0000	0.000000	0
11	0.0000	4.0000	0.000000	0
12	2.0000	4.0000	0.000000	0
13	4.0000	4.0000	0.000000	0
14	6.0000	4.0000	0.000000	0
15	7.0000	5.0000	0.000000	0
16	8.0000	4.0000	10.000000	1
17	0.0000	2.0000	0.000000	0
18	2.0000	2.0000	0.000000	0
19	4.0000	2.0000	0.000000	0
20	5.0000	3.0000	0.000000	0
21	6.0000	2.0000	0.000000	0
22	7.0000	3.0000	0.000000	0
23	8.0000	2.0000	10.000000	1
24	0.0000	0.0000	0.000000	0
25	2.0000	0.0000	0.000000	0
26	4.0000	0.0000	0.000000	0
27	5.0000	1.0000	0.000000	0
28	6.0000	0.0000	0.000000	0
29	7.0000	1.0000	0.000000	0
30	8.0000	0.0000	10.000000	1

SOLUCIONES DEL PROBLEMA

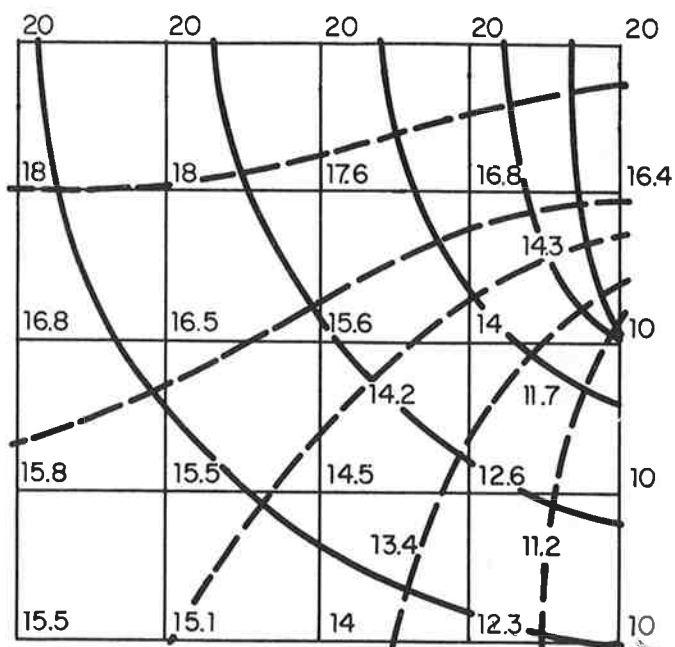
NUMO	ABSCISA (X)	ORDENADA (Y)	POTENCIAL
1	0.0000	8.0000	20.000000
2	2.0000	8.0000	20.000000

3	4.0000	8.0000	20.000000
4	6.0000	8.0000	20.000000
5	8.0000	8.0000	20.000000
6	0.0000	6.0000	18.236776
7	2.0000	6.0000	18.094468
8	4.0000	6.0000	17.640732
9	6.0000	6.0000	16.799584
10	3.0000	6.0000	16.359462
11	0.0000	4.0000	16.758170
12	2.0000	4.0000	16.500362
13	4.0000	4.0000	15.668876
14	6.0000	4.0000	14.117481
15	7.0000	5.0000	14.319132
16	8.0000	4.0000	10.000000
17	0.0000	2.0000	15.795178
18	2.0000	2.0000	15.479937
19	4.0000	2.0000	14.494044
20	5.0000	3.0000	14.228646
21	6.0000	2.0000	12.634183
22	7.0000	3.0000	11.687916
23	8.0000	2.0000	10.000000
24	0.0000	0.0000	15.462670
25	2.0000	0.0000	15.130162
26	4.0000	0.0000	14.098104
27	5.0000	1.0000	13.384104
28	6.0000	0.0000	12.310086
29	7.0000	1.0000	11.238067
30	8.0000	0.0000	10.000000

ELEMENTO	VELOCIDAD		QXI	QXJ	G A S T U			QYI	QYJ	QYM
	VX	VY			QXM	QYI	QYJ			
1	.71154E+01	-.88161E+00	0.	.71154E+01	-.71154E+01	.88161E+00	-.88161E+00	0.		
2	0.	-.95277E+00	0.	0.	0.	0.	-.95277E+00	.95277E+00		
3	.22687E+00	-.95277E+00	0.	.22687E+00	-.22687E+00	.95277E+00	-.95277E+00	0.		
4	0.	-.11796E+01	0.	0.	0.	0.	-.11796E+01	.11796E+01		
5	.42057E+00	-.11796E+01	0.	.42057E+00	-.42057E+00	.11796E+01	-.11796E+01	0.		
6	0.	-.16002E+01	0.	0.	0.	0.	-.16002E+01	.16002E+01		
7	.22006E+00	-.16002E+01	0.	.22006E+00	-.22006E+00	.16002E+01	-.16002E+01	0.		
8	0.	-.18203E+01	0.	0.	0.	0.	-.18203E+01	.18203E+01		
9	.12890E+00	-.73930E+00	0.	.12890E+00	-.12890E+00	.73930E+00	-.73930E+00	0.		
10	.71154E+01	-.79705E+00	.71154E+01	0.	-.71154E+01	0.	-.79705E+00	.79705E+00		
11	.41574E+00	-.79705E+00	0.	.41574E+00	-.41574E+00	.79705E+00	-.79705E+00	0.		
12	.22687E+00	-.98593E+00	.22687E+00	0.	-.22687E+00	0.	-.98593E+00	.98593E+00		
13	.77570E+00	-.98593E+00	0.	.77570E+00	-.77570E+00	.98593E+00	-.98593E+00	0.		
14	.42057E+00	-.13411E+01	.42057E+00	0.	-.42057E+00	0.	-.13411E+01	.13411E+01		
15	.11394E+01	-.13411E+01	.56970E+00	.56970E+00	-.11394E+01	.67053E+00	-.67053E+00	0.		
16	.22006E+00	-.22604E+01	.11003E+00	0.	-.11003E+00	.11302E+01	-.22604E+01	.11302E+01		
17	.11394E+01	-.31797E+01	.11394E+01	-.56970E+00	-.56970E+00	0.	-.15899E+01	.15899E+01		
18	.20587E+01	-.22604E+01	0.	.10294E+01	-.10294E+01	.22604E+01	-.11302E+01	-.11302E+01		
19	.15762E+00	-.48150E+00	0.	.15762E+00	-.15762E+00	.48150E+00	-.48150E+00	0.		
20	.12890E+00	-.51021E+00	.12890E+00	0.	-.12890E+00	0.	-.51021E+00	.51021E+00		

21	.49295E+00	-.51021E+00	0.	.49295E+00	-.49295E+00	.51021E+00	-.51021E+00	0.
22	.41574E+00	-.58742E+00	.41574E+00	0.	-.41574E+00	0.	-.58742E+00	.58742E+00
23	.85281E+00	-.58742E+00	.42641E+00	.42641E+00	-.85281E+00	.29371E+00	-.29371E+00	0.
24	.77570E+00	-.66453E+00	.38785E+00	0.	.38785E+00	.33227E+00	-.66453E+00	.33227E+00
25	.85281E+00	-.74165E+00	.85281E+00	-.42641E+00	-.42641E+00	0.	-.37082E+00	.37082E+00
26	.92993E+00	-.66453E+00	0.	.46497E+00	-.46497E+00	.66453E+00	-.33227E+00	.33227E+00
27	.16879E+01	-.74165E+00	.84396E+00	.84396E+00	-.16879E+01	.37082E+00	-.37082E+00	0.
28	.20587E+01	-.37082E+00	.10294E+01	0.	-.10294E+01	.18541E+00	-.37082E+00	.18541E+00
29	.16879E+01	0.	.16879E+01	-.84396E+00	-.84396E+00	0.	0.	0.
30	.13171E+01	-.37082E+00	0.	.65855E+00	-.65855E+00	.37082E+00	-.18541E+00	.18541E+00
31	.16625E+00	-.16625E+00	0.	.16625E+00	-.16625E+00	.16625E+00	-.16625E+00	0.
32	.15762E+00	-.17489E+00	.15762E+00	0.	.15762E+00	0.	-.17489E+00	.17489E+00
33	.51603E+00	-.17489E+00	0.	.51603E+00	-.51603E+00	.17489E+00	-.17489E+00	0.
34	.49295E+00	-.19797E+00	.49295E+00	0.	.49295E+00	0.	-.19797E+00	.19797E+00
35	.91197E+00	-.19797E+00	.45598E+00	.45598E+00	-.91197E+00	.98985E+01	-.98985E+01	0.
36	.92993E+00	-.18001E+00	.46497E+00	0.	.46497E+00	.90005E+01	-.18001E+00	.90005E+01
37	.91197E+00	-.16205E+00	.91197E+00	-.45598E+00	-.45598E+00	0.	-.81024E+01	.81024E+01
38	.89401E+00	-.18001E+00	0.	.44700E+00	-.44700E+00	.18001E+00	-.90005E+01	.90005E+01
39	.12361E+01	-.16205E+00	.61803E+00	.61803E+00	-.12361E+01	.81024E+01	-.81024E+01	0.
40	.13171E+01	-.81024E+01	.65855E+00	0.	-.65855E+00	.40512E+01	-.81024E+01	.40512E+01
41	.12361E+01	0.	.12361E+01	-.61803E+00	-.61803E+00	0.	0.	0.
42	.11550E+01	-.81024E+01	0.	.57752E+00	-.57752E+00	.81024E+01	-.40512E+01	.40512E+01

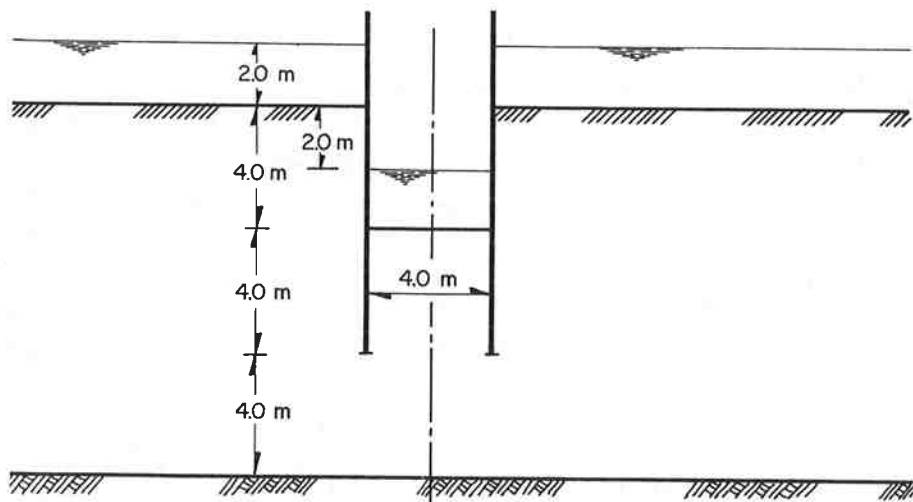
Las soluciones obtenidas permiten dibujar la red de flujo como se presenta a continuación



Para el cálculo del gasto de salida hay que sumar los gastos de los tres nudos libres (16, 23 y 30). Para que sirva de ejemplo, en el elemento 29, el nudo 23 corresponde a J , Q_{XJ} vale -0.84396 (el signo menos indica salida del elemento), Q_{YJ} vale cero. Es interesante observar que en cada elemento debe cumplirse la continuidad, y que la suma de los gastos en x y en y vale cero siempre.

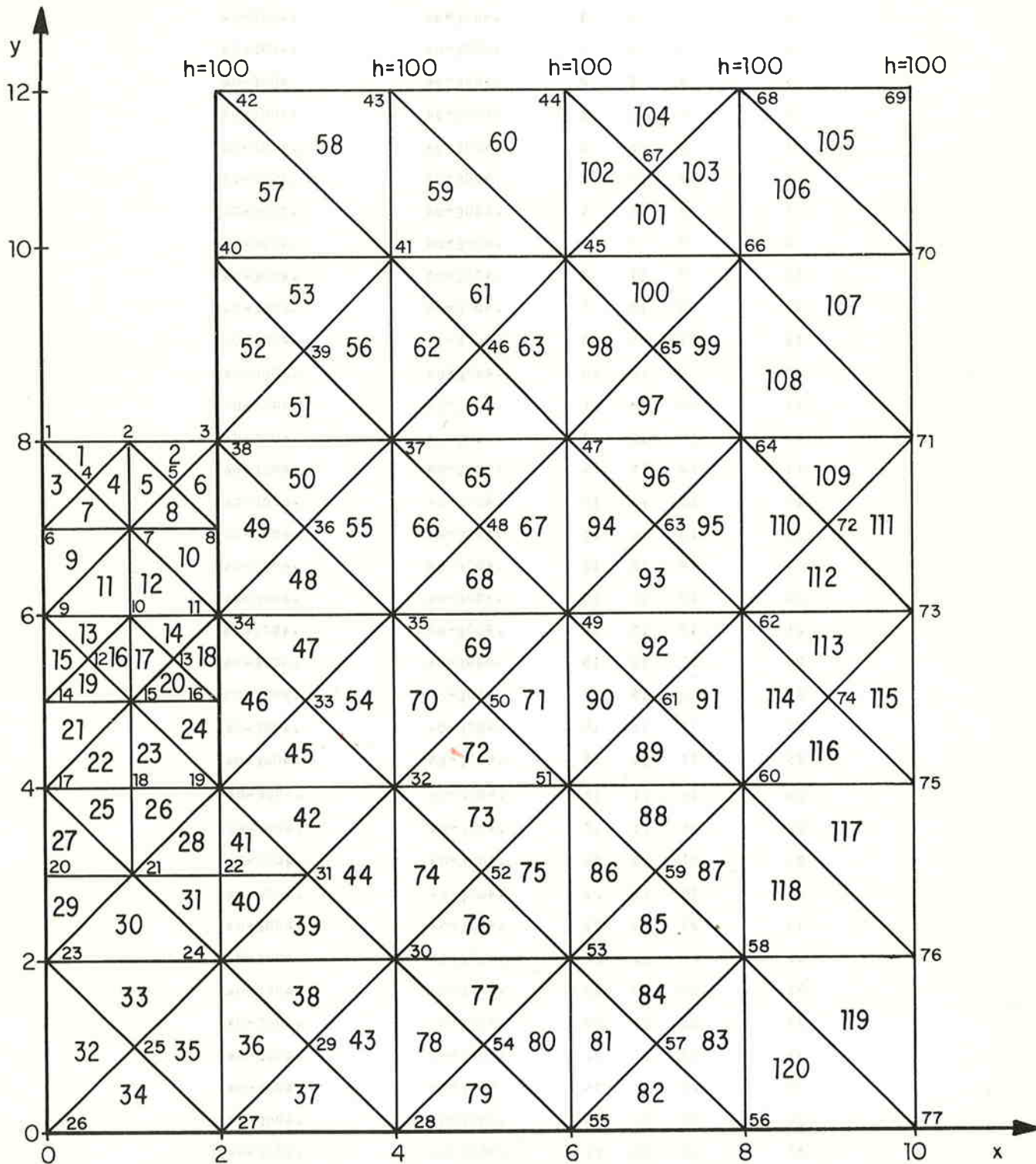
Sumando los gastos de salida se tiene que el gasto total vale 7.4471 en las unidades que correspondan (este problema fue planteado sin dimensiones específicas).

Ejemplo 3. En un suelo arenoso de 12.0 m de espesor, que descansa sobre una roca impermeable, se hace una excavación de 4.0 m de ancho por 4.0 m de profundidad y de gran longitud. La superficie de la arena es horizontal y los lados de la excavación son retenidos por medio de tablestacas que se llevaron hasta una profundidad de 4.0 m bajo la excavación. El agua se encuentra en ambos lados de la excavación a 2.0 m sobre el nivel del suelo. El coeficiente de permeabilidad es de 4×10^{-5} m/seg en todas direcciones. Obtener la red de flujo y el gasto que sale por la excavación.



SOLUCION. Por ser simétrico el problema, conviene resolver solo la mitad derecha. Las condiciones de carga hidráulica se suponen arbitrariamente de 100 en la superficie más elevada y de 0 en la excavación; con ello se establece la red de flujo. Los resultados no se alteran por esta suposición, ya que la diferencia de potencial entre los nudos de cada elemento, que es lo que determina el flujo, permanece constante.

Para no seguir el mismo proceso que en los problemas anteriores, se presenta la malla planteada y el conjunto de soluciones. El lector deberá obtener el resultado final de este problema.



SOLUCION DEL PROBLEMA NUMERO 3

ELEMENTO	NUDOS QUE FORMAN AL ELEMENTO			PERMEABILIDAD X	PERMEABILIDAD Y
1	1	4	2	.400E-04	.400E-04
2	2	5	3	.400E-04	.400E-04
3	6	4	1	.400E-04	.400E-04
4	4	7	2	.400E-04	.400E-04
5	7	5	2	.400E-04	.400E-04
6	5	8	3	.400E-04	.400E-04
7	6	7	4	.400E-04	.400E-04
8	7	8	5	.400E-04	.400E-04
9	9	7	6	.400E-04	.400E-04
10	7	11	8	.400E-04	.400E-04
11	9	10	7	.400E-04	.400E-04
12	7	10	11	.400E-04	.400E-04
13	9	12	10	.400E-04	.400E-04
14	10	13	11	.400E-04	.400E-04
15	14	12	9	.400E-04	.400E-04
16	12	15	10	.400E-04	.400E-04
17	15	13	10	.400E-04	.400E-04
18	13	16	11	.400E-04	.400E-04
19	14	15	12	.400E-04	.400E-04
20	15	16	13	.400E-04	.400E-04
21	17	15	14	.400E-04	.400E-04
22	17	18	15	.400E-04	.400E-04
23	18	19	15	.400E-04	.400E-04
24	19	16	15	.400E-04	.400E-04
25	17	21	18	.400E-04	.400E-04
26	18	21	19	.400E-04	.400E-04
27	20	21	17	.400E-04	.400E-04
28	21	22	19	.400E-04	.400E-04
29	20	23	21	.400E-04	.400E-04
30	23	24	21	.400E-04	.400E-04
31	24	22	21	.400E-04	.400E-04
32	26	25	23	.400E-04	.400E-04
33	25	24	23	.400E-04	.400E-04
34	25	26	27	.400E-04	.400E-04
35	25	27	24	.400E-04	.400E-04
36	27	29	24	.400E-04	.400E-04
37	27	28	29	.400E-04	.400E-04

38	29	30	24	.400E-04	.400E-04
39	24	30	31	.400E-04	.400E-04
40	24	31	22	.400E-04	.400E-04
41	22	31	19	.400E-04	.400E-04
42	31	32	19	.400E-04	.400E-04
43	29	28	30	.400E-04	.400E-04
44	31	30	32	.400E-04	.400E-04
45	19	32	33	.400E-04	.400E-04
46	19	33	34	.400E-04	.400E-04
47	33	35	34	.400E-04	.400E-04
48	34	35	36	.400E-04	.400E-04
49	34	36	38	.400E-04	.400E-04
50	36	37	38	.400E-04	.400E-04
51	38	37	39	.400E-04	.400E-04
52	38	39	40	.400E-04	.400E-04
53	39	41	40	.400E-04	.400E-04
54	33	32	35	.400E-04	.400E-04
55	36	35	37	.400E-04	.400E-04
56	39	37	41	.400E-04	.400E-04
57	40	41	42	.400E-04	.400E-04
58	42	41	43	.400E-04	.400E-04
59	43	41	45	.400E-04	.400E-04
60	43	45	44	.400E-04	.400E-04
61	41	46	45	.400E-04	.400E-04
62	41	37	46	.400E-04	.400E-04
63	46	47	45	.400E-04	.400E-04
64	37	47	46	.400E-04	.400E-04
65	37	46	47	.400E-04	.400E-04
66	37	35	48	.400E-04	.400E-04
67	48	49	47	.400E-04	.400E-04
68	48	35	49	.400E-04	.400E-04
69	35	50	49	.400E-04	.400E-04
70	35	32	50	.400E-04	.400E-04
71	50	51	49	.400E-04	.400E-04
72	50	32	51	.400E-04	.400E-04
73	32	52	51	.400E-04	.400E-04
74	32	30	52	.400E-04	.400E-04
75	52	53	51	.400E-04	.400E-04
76	52	30	53	.400E-04	.400E-04
77	30	54	53	.400E-04	.400E-04
78	30	28	54	.400E-04	.400E-04
79	54	28	55	.400E-04	.400E-04

80	54	55	53	.400E-04	.400E-04
81	53	55	57	.400E-04	.400E-04
82	57	55	56	.400E-04	.400E-04
83	57	56	58	.400E-04	.400E-04
84	53	57	58	.400E-04	.400E-04
85	53	58	59	.400E-04	.400E-04
86	53	59	51	.400E-04	.400E-04
87	59	58	60	.400E-04	.400E-04
88	59	60	51	.400E-04	.400E-04
89	51	60	61	.400E-04	.400E-04
90	51	61	49	.400E-04	.400E-04
91	61	60	62	.400E-04	.400E-04
92	61	62	49	.400E-04	.400E-04
93	49	62	63	.400E-04	.400E-04
94	49	63	47	.400E-04	.400E-04
95	63	62	64	.400E-04	.400E-04
96	63	64	47	.400E-04	.400E-04
97	47	64	65	.400E-04	.400E-04
98	47	65	45	.400E-04	.400E-04
99	65	64	66	.400E-04	.400E-04
100	65	66	45	.400E-04	.400E-04
101	45	66	67	.400E-04	.400E-04
102	45	67	44	.400E-04	.400E-04
103	67	66	68	.400E-04	.400E-04
104	67	68	44	.400E-04	.400E-04
105	68	70	69	.400E-04	.400E-04
106	66	70	68	.400E-04	.400E-04
107	66	71	70	.400E-04	.400E-04
108	66	64	71	.400E-04	.400E-04
109	64	72	71	.400E-04	.400E-04
110	64	62	72	.400E-04	.400E-04
111	72	73	71	.400E-04	.400E-04
112	72	62	73	.400E-04	.400E-04
113	62	74	73	.400E-04	.400E-04
114	62	60	74	.400E-04	.400E-04
115	74	75	73	.400E-04	.400E-04
116	74	60	75	.400E-04	.400E-04
117	60	76	75	.400E-04	.400E-04
118	60	58	76	.400E-04	.400E-04
119	56	77	76	.400E-04	.400E-04
120	58	56	77	.400E-04	.400E-04

NUMO	ARSCISA (X)	ORDENADA (Y)	POTENCIAL	CASU
1	0.0000	8.0000	0.000000	1
2	1.0000	8.0000	0.000000	1
3	2.0000	8.0000	0.000000	1
4	0.5000	7.5000	0.000000	0
5	1.5000	7.5000	0.000000	0
6	0.0000	7.0000	0.000000	0
7	1.0000	7.0000	0.000000	0
8	2.0000	7.0000	0.000000	0
9	0.0000	6.0000	0.000000	0
10	1.0000	6.0000	0.000000	0
11	2.0000	6.0000	0.000000	0
12	0.5000	5.5000	0.000000	0
13	1.5000	5.5000	0.000000	0
14	0.0000	5.0000	0.000000	0
15	1.0000	5.0000	0.000000	0
16	2.0000	5.0000	0.000000	0
17	0.0000	4.0000	0.000000	0
18	1.0000	4.0000	0.000000	0
19	2.0000	4.0000	0.000000	0
20	0.0000	3.0000	0.000000	0
21	1.0000	3.0000	0.000000	0
22	2.0000	3.0000	0.000000	0
23	0.0000	2.0000	0.000000	0
24	2.0000	2.0000	0.000000	0
25	1.0000	1.0000	0.000000	0
26	0.0000	0.0000	0.000000	0
27	2.0000	0.0000	0.000000	0
28	4.0000	0.0000	0.000000	0
29	3.0000	1.0000	0.000000	0
30	4.0000	2.0000	0.000000	0
31	3.0000	3.0000	0.000000	0
32	4.0000	4.0000	0.000000	0
33	3.0000	5.0000	0.000000	0
34	2.0000	6.0000	0.000000	0
35	4.0000	6.0000	0.000000	0
36	3.0000	7.0000	0.000000	0
37	4.0000	8.0000	0.000000	0
38	2.0000	8.0000	0.000000	0
39	3.0000	9.0000	0.000000	0
40	2.0000	10.0000	0.000000	0